B_n 型 Weyl 群的某些 sl_2 型表示

1. 引言。

在 [3] 中对 X为一个 B_n (或 C_n) 型 Weyl 群时, 作者构造了 X 的一些不可约的复表示。这些表示都被构造成在 Tits 复型的某一个 "由秩选择的" (rank selected) 子复型。这些构造的方法是比较标准的, 即在上述子复型的 下同调模的中心化子里, 给出了对应的本原幂等元素。不过, 在"薄的" 情 况下, 那就是说当 X为一个 Weyl 群时, 那些表示的方法不怎么有启发性。 若 E 为上述下同调模的中心化子代数, 则作者证明了 E 是可交换的并且是由 某一个元素 T 生成的。因此所有的本原幂等元素都可以表示成 T 幂的线 性组合 $\sum a_s T^s$。由于按此给出本原幂等元素, 这个问题就可以归结到确定 系数 α_s 的问题。再则, 从"左乘法" $T : E \to E$ 这个算子的特征值, 我们能够确定所要求的系数 α_s (见 [3])。

在本文中我们假定群 X 为一个 B_n (或 C_n) 型 Weyl 群。本文主要的 目的是给出中心化子代数的所有本原幂等元素的一个新方法, 此构造的方法不 但比 [3] 更简单, 而且和李代数 $sl_2(\mathbf{C})$ 的有限维模之间有联系。具体地 说, 我们将证明上面提出的算子 T 在 E 上的作用与方阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbf{C})$$

在不定元 x, y 的 r 次齐次多项式空间上 (r 为 E 的维数) 的作用基上相同。

2. 问题的回顾。

设 W 是 B_n 型群, 与它具体的表示为集合 $\{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$上的有符置换群等同。作为一个 Coxeter 群, W 的基本生成元为 $s_1 = (12), s_2 = (23), \ldots, s_{n-1} = (n-1, n), s_n = (-n)\#$ 对于每一个子集合 $J \subseteq R := \{1, 2, \ldots n\}$, 取

$$W_J =< s_j |\ j \in J >;$$

子群 W_J 称为 W 的抛物子群。

群 W 按显然的方式作用于由超八面体生成的一个单纯复形 Δ。这个复形 Δ 的顶点集合为 $\sigma = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ 其中 $|i_p| \neq |i_q|$ 当 $p \neq q$。现在可以 定义 Coxeter 复形 Θ 为复形 Δ 的重心重分。因此 Θ 的顶点为子集合 $\sigma = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ (即复形 Δ 的单形) 而 Δ 的单形为全有序集 $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_h\}$。

对于每一个子集 $K\subseteq R$ 所谓 “由秩选择的” 子复形 Δ_K 以集合$\sigma=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ 为 Θ_K 的顶点, 其中 $k\in K$。于是我们有 $\Theta=\Theta_R$; 在一般的情况下复形 Θ_K 的维数为 $|K|-1$。注意群 W 可按明显的方法作用于复形 Θ_K; 因此如果 $H_i(\Theta_K)$ 是 Θ_K 的有理系数下同调模, $0\le i\le|K|-1$, 则 W 也作用于每一个空间 $H_i(\Theta_K)$。我们的基本目的就是要把 $H_i(\Theta_K)$ 分解成不可约的 W- 子模, 其中 $d=|K|-1$。

利用文 [2] 或 [1] 的结果, 我们得知如果 $H_i(\Theta_K)\neq 0$ 和 $i>0$, 则一定有 $i=d=|K|-1$, 此即复形的维数。为了简化符号, 我们把 $H_d(\Theta_K)$ 写成 $H(\Theta_K)$ 现在设 $C(\Theta_K)$ 是最高阶的链模, 换句话来说, $C(\Theta_K)$ 是由 d 维单纯形为基的一个线性空间。 因此我们可知 $H(\Theta_K)$ 为 $C(\Theta_K)$ 的一个 W- 子模。

在本文中, 我们将考虑有关子集 $K\subseteq R$ 正如在文 [3] 中一样, 即 K 由形式为 $K=K_r=\{r,r+1,\ldots,n\}$, 其中 $r+1,2,\ldots,n$, 组成。于是作为 W- 模的 $C_r=C(\Theta_K)$ 是由标志 (flag)

$$\sigma_0=[\{1,2,\ldots,r\}\subseteq\{1,2,\ldots,r+1\}\subseteq\cdots\subseteq\{1,2,\ldots,n\}]$$

生成的。再则注意 W 中的 σ_0 的稳定化子群就是抛物子群 $W_{K'}$, 其中 $K'=R-K$。 下面我们定义在 W 模上的一组自同态 $T_i:C_r\to C_r$ 为

$$T_i(x\sigma_0)=x\sum_{w\in W_{K'}}w(-1)(-2)\cdots(-i)\sigma_0;$$

在上边的方程中, x 为 W 的任意元素。很明显, 每一个 T_i 都为无 歧义地定义的。

注意若 $0\le i\le r$ 的话, 则

$$\begin{aligned}
T_1T_i(\sigma_0) &= x\sum_{w\in W_{K'}}w(-1)\cdots(-i)\sum_{w'\in W_{K'}}w'(-1)(\sigma_0)\\
&= (r-1)!\sum_{w\in W_{K'}}w(-1)\cdots(-i)[(-1)+\cdots+(-r)](\sigma_0)\\
&= (r-1)!iT_{i-1}+(r-1)!(r-i)T_{i+1}\text{。} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

因此不难把上面的演算推广成下面的乘法公式:

$$T_kT_i = k!(r-k)!\sum_{j=0}^{k}\binom{k-j}{i}\binom{j}{r-i}T_{i-k+2j},$$

$0\le k,i\le r$。于是我们能推断集合 $\{T_0,T_1,\ldots T_r\}$ 的线性组合为代数 $\mathrm{End}_W(C_r)$ 的一个子代数。

当 $0 \le i \le r$ 时, 我们把同态 T_i 在 $H(\Theta_K)$ 上的限制写成 。$\tilde{T}_i$。那么从文 [3] 中的结果, 可知 $\tilde{T}_i(H(\Theta_K)) \subseteq H(\Theta_K)$, 因而我们得到一个同态

$$E_r \longrightarrow \mathrm{End}_W(H(\Theta_K))。$$

又利用文 [3] 中的结果, 可推上面的同态既是满射的, 而且有维数为 1 的核。 再则, 这个核由下列的算子生成:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} T_{r-j}。$$

因此, 除了上边的元素之外, 我们主要的问题就是计算 E_r 里所有其它本原幂 等元素

$$e \;=\; \sum_{j=0}^{r} \alpha_j T_j。$$

3. 本原幂等元素。

对方程 (2.1) 左乘算子 $\frac{i}{(r-1)!}T_1$,此运算可以由一个矩阵表示成

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ r & 0 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & r-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & r-2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & r \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}。 \tag{3.1}$$

我们知道单纯李代数 $L = sl_2(\mathbf{C})$ 的有限维不可约模都可按下面方式构造出来。设 x, y 为不定元素而 V 为由 x, y 组合的线性空间。李 代数 L 可以作用于 V 如下:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : x \mapsto ax + cy,\; y \mapsto bx + dy。$$

现在设 $V^{(r)}$ 是空间 V 的 r 次对称幂; 于是我们能把 $V^{(r)}$ 当作为 不定元 x, y 的 r 次齐次多项式空间。 L 在 $V^{(r)}$ 上的作用是按照 所谓 “微分法” 给出, 即如果 $\tau \in L$, 则

$$\tau(x^{r-i}y^i) = (r-i)x^{r-i-1}\tau(x)y^i + ix^{r-i}y^{i-1}\tau(y)。$$

具体地说, 当 $\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 时, 得

$$\tau(x^{r-i}y^i) = (r-i)x^{r-i-1}y^{i+1} + ix^{r-i+1}y^{i-1}。$$

由此, 对于空间 $V^{(r)}$ 的基 $\{x^r, x^{r-1}y, \ldots, y^r\}$, τ 在上的作用能由 (3.1) 的方阵表示出来。

其次, 注意上面的方程意味着

$$\tau(x+y)^{r-i}(x-y)^i = (r-2i)(x+y)^{r-i}(x-y)^i。$$

换句话来说, 空间 E_r 中的向量 $(x+y)^{r-i}(x-y)^i, i = 0, 1, \ldots, r,$ 都是线性算子 T_1 的特征向量。因此我们得到

定理。若 $0 \leq i \leq r$ 且

$$(x+y)^{r-i}(x-y)^i = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{ij} x^{r-j} y^j,$$

那么, 除了纯量倍数之外, 元素

$$f_i \ = \ \sum_{j=0}^{r} \alpha_{ij} T_j$$

都为代数 E_r 中的所有的本原幂等元素。

作为结束, 我们将进一步计算上面提到的纯量倍数。首先, 在有里群代数 $\mathbf{Q}W$ 内我们构造下列的元素:

$$n_i \ = \ \prod_{i=1}^{r-i}[1+(-j)] \prod_{j=r-i+1}^{r}[1-(-j)];$$

这样就有

$$f_i \ = \ \sum_{w \in W_{K'}} w n_i \sigma_0。$$

现可得出

$$\begin{aligned} f_i^2 \ &= \ \sum_{w \in W_{K'}} w n_i \sum_{w' \in W_{K'}} w' n_i \sigma_0 \\ &= \ \sum_{w \in W_{K'}} w \sum_{w' \in W_{K'}} n_i w' n_i w'^{-1} \sigma_0。\end{aligned}$$

易见本原幂等元 $\frac{1}{2^r} n_i$ 对应于基本阿贝耳群 $< (-j) |\ 1 \leq j \leq r >$ 的不可约特征标

$$(-j) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ 当 } 1 \le j \le r-i \\ -1 \text{ 当 } r-i+1 \le j \le r \end{cases} \text{。}$$

于是

$$n_i w' n_i w'^{-1} \;=\; \begin{cases} 2^r n_i \text{ 当 } w' n_i w'^{-1} = n_i \\ 0 \text{ 当 } w' n_i w'^{-1} \ne n_i \end{cases} \text{。}$$

因为元素 n_i 在群 $W_{K'}$ 中的稳定化子的阶为 $(r-i)!i!$ 我们推断

$$f_i^2 \sigma_0 \;=\; 2^r (r-i)!i! f_i \sigma_0 \;=\; \frac{r!2^r}{\binom{r}{i}} f_i \sigma_0,$$

因此 $\frac{\binom{r}{i}}{r!2^r} f_i$ 为要求的本原幂等元素。

参 考 文 献

[1] *A. Björner*, Some combinatorial and algebraic properties of Coxeter complexes and Tits buildings, Report No. 3, Univ. Stockholm Dept. of Math, 1982.

[2] *D. B. Surowski*, A reflection sieve for BN-pairs of types A_n, B_n and C_n, *J. Algebra* **73** (1981), 538-551.

[3] *D. B. Surowski*, A family of homology representations of finite groups of type B_n, *J. Algebra* Vol. 103, No. 1 (1986), 538-551.